

No.4 行基本変形

この回のゴール

- 3 種類の行基本変形を説明でき、それぞれが「基本行列を左から掛けること」に対応することが分かる.
- 行列を (簡約) 階段行列に変形できる.
- 行基本変形を使って、3 次以上の正方行列の逆行列を求められる.

■ 1. 行基本変形

中学・高校で連立方程式を解くとき、「式を入れ替える」「式を何倍かする」「ある式に別の式の何倍かを足す」という操作をした. これを行列の行に対する操作として整理したものが行基本変形である.

定義 1 行基本変形

行列に対する次の 3 種類の操作を行基本変形という.

- (I) 2 つの行を入れ替える.
- (II) ある行を 0 でない数 c 倍する.
- (III) ある行に、別の行の c 倍を加える.

このプリントでは、第 i 行を ①, ②, $\dots$ のように丸数字で表し、変形を次のように書く.

$$\textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{2} \text{ (入れ替え)}, \quad \textcircled{2} \times \frac{1}{3} \text{ (定数倍)}, \quad \textcircled{2} - \textcircled{1} \times 2 \text{ (}\textcircled{2}\text{に}\textcircled{1}\text{の} - 2\text{倍を加える)}.$$

注意

- (II) で $c = 0$ は禁止. 行を 0 倍すると情報が消えて、元に戻せなくなる.
- (III) で変わるのは「加えられた側」の行だけ. たとえば $\textcircled{2} - \textcircled{1} \times 2$ では $\textcircled{2}$ だけが変わり、 $\textcircled{1}$ はそのまま残る.
- どの変形も逆向きの変形で元に戻せる: (I) はもう一度入れ替える, (II) は $\frac{1}{c}$ 倍する, (III) は $-c$ 倍を加える.

■ 2. 基本行列

行基本変形は、ある特別な行列を**左から掛ける**ことで実現できる。3 次の場合で見てみよう。

例 1

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \text{ とすると,}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ c b_1 & c b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 + c a_1 & c_2 + c a_2 \end{pmatrix}.$$

それぞれ「①と②の入れ替え」「②を c 倍」「③に①の c 倍を加える」になっている。

左から掛けた行列は、どれも**単位行列 E に同じ変形をしたものである**。

定義 2 基本行列

n 次単位行列 E に行基本変形を 1 回行ってできる行列を**基本行列**という。

- $P(i, j)$: E の第 i 行と第 j 行を入れ替えたもの。
- $Q(i; c)$: E の第 i 行を c 倍したもの ($c \neq 0$)。つまり (i, i) 成分を c にしたもの。
- $R(i, j; c)$: E の第 i 行に第 j 行の c 倍を加えたもの ($i \neq j$)。つまり (i, j) 成分を c にしたもの。

定理 1 行基本変形と基本行列

- (1) 行列 A に行基本変形を 1 回行った結果は、対応する基本行列を A に**左から掛けたもの**に等しい。
- (2) 基本行列はすべて正則で、その逆行列も基本行列である：

$$P(i, j)^{-1} = P(i, j), \quad Q(i; c)^{-1} = Q(i; \frac{1}{c}), \quad R(i, j; c)^{-1} = R(i, j; -c).$$

(1) は例 1 と同様に積を計算すれば確かめられる。(2) は「逆向きの変形で元に戻せる」ことを行列で言い直したものである。たとえば $R(i, j; -c)R(i, j; c)$ は「 E の第 i 行に第 j 行の c 倍を加え、次に $-c$ 倍を加える」ので E に戻る。

注意

- 行基本変形を何回か続けて行うことは、基本行列 $P_1, P_2, \dots, P_k$ を順に左から掛けて $P_k \cdots P_2 P_1 A$ を作ることに等しい。
- 基本行列を**右から掛ける**と、今度は**列**に対する変形（列基本変形）になる。このプリントでは主に行基本変形を使う。

3. 階段行列

行基本変形で行列をできるだけ「すっきりした形」にすることを旨とする。目標となる形が階段行列である。

定義 3 階段行列

各行について、左から見て最初に現れる 0 でない成分を、その行の**主成分**（ピボット）という。行列が次の 2 条件を満たすとき**階段行列**という。

- (i) 成分がすべて 0 の行（零行）があれば、それらはすべて下にまとまっている。
- (ii) 零行でない行の主成分は、下の行ほど**真に右**にある。

さらに次の 2 条件も満たすものを**簡約階段行列**という。

- (iii) 主成分はすべて 1。
- (iv) 主成分を含む列は、主成分以外の成分がすべて 0。

例 2

次の左の 2 つは階段行列、右の 1 つは簡約階段行列である（□ が主成分）。

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{5} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{4} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

一方、 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ は第 2 行の主成分が第 1 行の主成分より左にあるので、階段行列ではない。

定理 2

どんな行列も、行基本変形を有限回くり返して簡約階段行列に変形できる。しかも、できあがる簡約階段行列は、**変形のやり方によらずただ 1 つに決まる**。

前半は次の手順（掃き出し）で実際に変形できることから分かる。後半（一意性）の証明はやや長いので省略する。一意性は、次回 No.5 で「ランク」を定義するときの土台になる。

簡約階段行列への手順（掃き出し）

1. 左から見て、0 でない成分をもつ最初の列を探す。必要なら行を入れ替えて、その成分を一番上に持ってくる。
2. その成分を 1 にする（その行を定数倍）。
3. その 1 を使って、同じ列の他の成分をすべて 0 にする（他の行から定数倍を引く）。
4. 一番上の行を除いた残りの部分で、1～3 をくり返す。

「主成分の 1 で、その列を**掃き出す**」というイメージ。

例題 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ を簡約階段行列に変形せよ.}$$

【解答】

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{\textcircled{2}-\textcircled{1} \times 2, \textcircled{3}-\textcircled{1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}-\textcircled{2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\textcircled{2} \times \frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1}+\textcircled{2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

第 2 列は、第 1 列が掃き出された時点で②③の成分がすでに 0 なので、主成分は第 3 列に移る。

■ 4. 行基本変形で逆行列を求める

n 次正方行列 A の右に単位行列 E を並べた $n \times 2n$ 行列 $(A | E)$ を考える。

定理 3 逆行列の計算法

n 次正方行列 A について、 $(A | E)$ に行基本変形をくり返して

$$(A | E) \longrightarrow (E | X)$$

と、左半分を E にできたならば、 A は正則で $X = A^{-1}$ である。

【証明】行った行基本変形に対応する基本行列を順に $P_1, \dots, P_k$ とし、 $P = P_k \cdots P_1$ とおく。左から P を掛けると左半分・右半分がそれぞれ P 倍されるので、

$$P(A | E) = (PA | PE) = (PA | P).$$

これが $(E | X)$ なので、 $PA = E$ かつ $P = X$ 。

定理 1 (2) より各 P_i は正則なので、No.3 定理 3 (2) をくり返し使うと P も正則。 $PA = E$ の両辺に左から P^{-1} を掛けて $A = P^{-1}$ 。よって A は正則で $A^{-1} = (P^{-1})^{-1} = P = X$ 。□

例題 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ の逆行列を求めよ.}$$

【解答】

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\xrightarrow{\textcircled{2}-\textcircled{1} \times 2, \textcircled{3}-\textcircled{1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow{\textcircled{1}-\textcircled{2} \times 2, \textcircled{3}-\textcircled{2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow{\textcircled{1} + \textcircled{3}, \textcircled{2}-\textcircled{3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

よって

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

最後に $AA^{-1} = E$ となることを確かめておくとう安心である.

注意

- 1つの矢印でいくつかの変形をまとめて行うときは、同じ行を「変える側」と「使う側」に同時に使わないこと. たとえば上の1つめの矢印で使う①は、その矢印の中では変えていない.
- 途中で左半分に零行が現れたら、左半分を E にすることはできない. このとき A は正則でない (理由は No.5 で説明する).
- 使うのは行基本変形だけ. 途中で列の変形を混ぜると正しい答えにならない.

■ 練習問題

1. 3 次の基本行列 $P(1,3)$, $Q(2;5)$, $R(3,1;-2)$ を具体的に書け. また, それぞれを $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ に左から掛けた結果を求め, どの行基本変形に対応するか答えよ.

2. 次の行列のうち, 階段行列であるものを選び. また, 簡約階段行列であるものも選べ.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. 次の行列を簡約階段行列に変形せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

4. 次の行列の逆行列を, 行基本変形を用いて求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ に対して $(A | E)$ に行基本変形を行うと, 左半分に零行が現れることを確かめよ.

6. 定理 1 (2) の $Q(i; c)^{-1} = Q(i; \frac{1}{c})$ と $P(i, j)^{-1} = P(i, j)$ を, 3 次の場合 ($i = 1, j = 2$) について積を計算して確かめよ.
7. (考えてみよう) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ を E に変形する行基本変形を 1 つ選び, それを基本行列の積 $P_k \cdots P_1$ で表せ. さらに A を基本行列の積で表せ.

■ 練習問題の解答

1.

$$P(1,3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(2;5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R(3,1;-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$P(1,3)A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q(2;5)A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 15 & 20 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad R(3,1;-2)A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

順に「①↔③」「②×5」「③-①×2」に対応する.

2. 階段行列: (a), (c), (d). (b) は零行の下に零行でない行があるので階段行列でない. 簡約階段行列: (a) のみ. (c) は主成分が 1 でない. (d) は第 2 列で主成分 1 の上に 2 が残っている.

3. (1)

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{\text{①} \leftrightarrow \text{②}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{③} - \text{①} \times 2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{③} - \text{②}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\text{②} \times \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{①} - \text{②}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(2)

$$\xrightarrow{\text{②} - \text{①} \times 2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{①} - \text{②} \times 2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. (1)

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{③} - \text{①}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\text{①} - \text{②}, \text{③} - \text{②}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\text{①} - \text{③}, \text{②} - \text{③}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

よって逆行列は $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

(2)

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\xrightarrow{\textcircled{2}-\textcircled{1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
&\xrightarrow{\textcircled{3}-\textcircled{2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \\
&\xrightarrow{\textcircled{3} \times \frac{1}{2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \\
&\xrightarrow{\textcircled{1}-\textcircled{3}, \textcircled{2}+\textcircled{3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right).
\end{aligned}$$

よって逆行列は $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

5.

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\xrightarrow{\textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
&\xrightarrow{\textcircled{3}-\textcircled{1} \times 2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \\
&\xrightarrow{\textcircled{3}-\textcircled{2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right).
\end{aligned}$$

左半分の第 3 行が零行になる. (A は正則でない.)

$$6. \quad Q(1; c) Q(1; \frac{1}{c}) = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E \quad (\text{逆順も同様}). \quad P(1, 2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = E.$$

7. 例えば

$$A \xrightarrow{\textcircled{2}-\textcircled{1} \times 3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} \times (-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1}-\textcircled{2} \times 2} E.$$

2 次の基本行列で書くと $R(1, 2; -2) Q(2; -\frac{1}{2}) R(2, 1; -3) A = E$. したがって

$$A = R(2, 1; -3)^{-1} Q(2; -\frac{1}{2})^{-1} R(1, 2; -2)^{-1} = R(2, 1; 3) Q(2; -2) R(1, 2; 2).$$

※ 変形の選び方は 1 通りではないので, 答えも 1 通りではない. 正則行列はいつでも基本行列の積で書ける.